

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #8

31/5/2017

Αδκ 30 Βρείτε $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ διαγωνιστός
ώστε $\text{rank}(A) = 2$

• ιδιοτιμές 0 και 1

• ιδιοδιανύσματα $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ποιό είναι το $m_A(x)$;

Παρατηρούμε $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$ άρα v_1, v_2, v_3

γραμμικά ανεξάρτητα, άρα βάση του $\mathbb{R}^{3 \times 1}$

Άρα A διαγωνιστός έχει τρία ιδιοτιμές $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$

Δύο δυνατότητες $\text{A) } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$

$\text{B) } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$

Στην i) A όμοιος με τον $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Άλλα όμοιοι πίνακες
έχουν ίδια βαθμίδα άρα $\text{rank}(A) = 1$ αντίφαση.

Συνεπώς αναγκαστικά ισχύει το ii)

Αναζητούμε A ώστε το v_i να είναι ιδιοδιανύσμα με ιδιοτιμή λ_i

Άρα αν θέσουμε $P = [v_1/v_2/v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ που είδαμε ότι είναι αντιστρέψιμος

αρκεί για τον A να ισχύει $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$A = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} = \dots$ μετά τις πράξεις $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
↑ βρίσκω τον P^{-1}
και κάνω πολλαπλ.

Αναγκαστικά $m_A(x) = x(x-1)$, αφού A διαγωνιστός
με ιδιοτιμές 0 και 1.

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #8

Α6κ 15 Έστω $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ γραμμική

$$T(x, y, z) = (2x + y + 4z, 3x + 3z, 4x + 2y + z)$$

Βρείτε την προαπτημένη (ή συζυγή) απεικόνιση $T^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
ως προς το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$

ΛΥΣΗ Μνημόνευση, για την T^* πρέπει να ισχύει $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$

για κάθε $v, w \in \mathbb{R}^3$

Θετούμε $e = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$$[T]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{φέρουμε ότι } \theta \text{ ορθοκανονική}$$

βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\text{Άρα } [T^*]_e^e = ([T]_e^e)^t \quad (\text{μόνο όταν έχω ορθοκανονική βάση})$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} 2x + 3y + 4z \\ 1x + 2z \\ 4x + 3y + z \end{cases}$$

$$T^*(x, y, z) = (2x + 3y + 4z, 1x + 2z, 4x + 3y + z)$$

$$T^*((x, y, z)) = T^*(x e_1 + y e_2 + z e_3) = x T^*(e_1) + y T^*(e_2) + z T^*(e_3)$$

Α6κ 14 Εάν ένας πίνακας είναι ορθογώνιος είναι και αντιστρέφσιμος
ή και τριγωνικός, τότε

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad \text{με } \varepsilon_i \in \{1, -1\} \text{ για κάθε } i$$

ΛΥΣΗ

Αρκεί να το κάνουμε για αντιστρέφσιμους (Γιατί αν ορθογώνιος

και καίτε τριγωνικός, ο A^t είναι ορθογώνιος
γιατί $A^t A = I_n = A^t (A^t)^t = (A^t)^t A^t = I_n$ και άρα τριγωνικός

Ισχυρισμός 1 Αν A ορθογώνιος και άρα τριγωνικός τότε A διαγωνίος
Έστω $V_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ η γραμμή του A .

Αφού A ορθογώνιος τα $v_1, v_2, \dots, v_n$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{1 \times n}$
(ως προς το κανονικό εσωτ. γινόμενο). Αφού A άρα τριγωνικός
υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ μη μηδενικός με $v_i = (0, 0, \dots, \lambda)$

Αφού για $1 \leq i \leq n-1$ $\langle v_i, v_n \rangle = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ το τελευταίο στοιχείο του
 v_i είναι το 0, δηλ $v_i = (\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n-1}, 0)$

$\bar{v}_i = (\mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,n-1}) \in \mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$. Τότε $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}$ ορθοκανονική βάση του
 $\mathbb{R}^{1 \times (n-1)}$. Συνεπώς ο $B = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{v}_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ ορθογώνιος και άρα τριγωνικός

Από υπόθεση επαγωγής στο $n \geq 2 \Rightarrow B$ διαγωνίος, άρα A διαγωνίος
(Αρχική περίπτωση $n=2$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ και $A^t A = I \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ba & b^2 + c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow b = 0$$

$$ab = 0$$

Ισχυρισμός 2 Αν $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος, τότε
για κάθε i $\lambda_i \in \{1, -1\}$

Από $I_n = A^t A = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_i^2 = 1 \forall i \Rightarrow \lambda_i \in \{1, -1\}$

{ Αντιστοίχα κάθε πραγματικός τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία
 $\{1, -1\}$ στην διαγώνιο είναι ορθογώνιος και άρα τριγωνικός }

Βήανος
Έστω $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Τότε $\chi_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_n)$ Αρα λ_i ιδιοτιμή του $A \forall i$

Αλλά A ορθογώνιος $\Rightarrow$ κάθε ιδιοτιμή στο $\mathbb{R}$ του A είναι 1 ή -1
 Άρα $\lambda_i^2 = 1 \quad \forall i$ Έστω $v_i = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ η i -γραμμή του A . Αφού A
 ορθογώνιος $\langle v_i, v_i \rangle = 1 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$
 Αλλά $b_i = \lambda_i$ και $\lambda_i^2 = 1$. Ξάν συνεπώς, $b_j = 0$ για $j \neq i$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #8

Άσκ 6. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός. Υποθέτουμε ότι $\exists m > 0$ ώστε

$$A^m = 0. \text{ Δείξτε } A = 0_{n \times n}$$

1) Βρείτε $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ συμμετρικός και $m > 0$ ώστε $B \neq 0_{n \times n}$
 αλλά $B^m = 0_{n \times n}$

Από: Αφού $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός, από το Θεώρημα
 υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ και $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος ώστε

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\text{Άρα } \left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \right)^m = (P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP = P^{-1}0_{n \times n}P = 0_{n \times n}$$

$$\text{Άρα } \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{bmatrix} = 0_{n \times n} = 0_{\mathbb{R}} \quad \forall i$$

$$(1) \Rightarrow A = P \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = 0_{n \times n}$$

$$\hookrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \text{ συμμετρικός } B^2 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 2}$$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ #8

Ασκ 210 Έστω $k, m, n \in \mathbb{R}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

α) Βρείτε τα k, m, n ώστε A διαγωνιστικός

β) Για τα k, m, n βρείτε $m_A(X)$ και μετά των A^{-1}

Δείξτε $A^{2017} + A^{2016} - 10A^{2015} + 8A^{2014} = 0_{3 \times 3}$

Έχουμε $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ k & 2-x & 0 \\ m & n & 1-x \end{vmatrix} = -(x-1)^2 \cdot (x-2)$

Δύο περιπτώσεις για το $m_A(X)$ γιατί διαφέρει το $\chi_A(X)$ έχει τους ίδιους ανελκούς παράγοντες με αυτό και είναι μονικός

Περίπτωση 1 $m_A(x) = (x-1)^2 (x-2)$ οπότε A ΟΧΙ διαγωνιστικός $\mathbb{R}$

Περίπτωση 2 $m_A(x) = (x-1)(x-2)$ οπότε A διαγωνιστικός $\mathbb{R}$

Η περίπτωση 2 συμβαίνει αν και μόνο αν ο A μηδενίζει το $(x-1)(x-2) \iff (A-2I_3)(A-I_3) = 0_{3 \times 3} \iff$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ m & n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ m & n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -m+nk & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 3} \iff m=nk$$

Αρα ο A διαγωνιστικός $\mathbb{R}$ $\iff m=nk$

Υποθέτουμε $m=nk$. Τότε ~~$\chi_A(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$~~ $m_A(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

Αρα $0_{3 \times 3} = m_A(A) = A^2 - 3A + 2I_3 \Rightarrow A(-A + 3I_3) = 2I_3 \Rightarrow A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3) = I_3$

$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I_3$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 2 & 0 \\ kn & n & 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 k & 1/2 & 0 \\ -1/2 kn & -1/2 n & 1 \end{bmatrix}$$

Θέλουμε $f(x) = x^{2017} + x^{2016} - 10x^{2015} + 8x^{2014}$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $f(A) = 0_{3 \times 3}$ Αυτό είναι ισοδύναμο με το $m_A(x)$ διαφέρει το $f(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$

$f(x) = x^{2014} (x^3 + x^2 - 10x + 8)$

Με διαίρεση πολυνομίων $x^3 + x^2 - 10x + 8 = m_A(x)(x+4)$ Αρα

$f(x) = x^{2014} m_A(x)(x+4)$ Αρα παίρνουμε $f(A) = 0_{3 \times 3}$

ΦΥΜΑΔΙΟ #8

Αβκ 31

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Εξετάστε αν ο A παριστά γύρωση επί ενός άξονα κάθετο σε αυτό. Αν ναι, να προσδιορίσετε τον άξονα και το συννημμένο της γωνίας στροφής

ΒΗΜΑ 1 Δείχνουμε A ορθογώνιος. Πράγματι

$$A^t A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 2

$$\det A = \det \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} = 1$$

ΒΗΜΑ 3 Από $\det A = 1$ και $A \neq I_3$, ο A παριστά στροφή επί ενός σε άξονα κάθετο ως προς αυτόν, από το θ. Euler. Ο άξονας είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος $V_{A(1)}$

$$(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)x + \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + (\frac{\sqrt{3}}{2} - 1)z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Μετα ως προς } V_{A(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ΒΗΜΑ 4

$$A \text{ ομοιος με } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(A) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right) = 1 + 2 \cos \theta$$

$$\text{Αρα } 1 + 2 \cos \theta = \text{Tr}(A) = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow 2 \cos \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$